Собственные значения и собственные функции

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\, q_k(t)\,, \tag{4.1}$$

где функции $p_k(x)$ и $q_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны на основном квадрате $[a,b]\times[a,b]$ и линейно независимы между собой. В случае ядра (4.1) уравнение Фредгольма (1.1) может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого перепишем уравнение (1.1) в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \int_a^b q_k(t)\, y(t)\, dt + f(x) \tag{4.2}$$

и введем обозначения

$$c_k = \int_a^b q_k(t)\, y(t)\, dt \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.3}$$

Тогда уравнение (4.2) принимает вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x) + f(x)\,, \tag{4.4}$$

где c_k – неизвестные постоянные.

Подставляя выражение (4.4) для функции $y(x)$ в формулу (4.3), получим

$$c_k = \int_a^b q_k(t) \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i p_i(t) + f(t) \right) dt =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b q_k(t)\, p_i(t)\, dt + \int_a^b q_k(t)\, f(t)\, dt = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ki} + b_k\,, \tag{4.5}$$

где постоянные a_{ki} и b_k определяются соотношениями

$$a_{ki} = \int_a^b p_i(t)\, q_k(t)\, dt\,, \quad b_k = \int_a^b q_k(t)\, f(t)\, dt\,. \tag{4.6}$$

Таким образом, вместо интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром получаем из (4.5) эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = b_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.7}$$

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = 0 . \tag{5.1}$$

Отметим, что уравнение (5.1) всегда имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое называется *нулевым (тривиальным) решением*. Значения числового параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $y(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами* (величина $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ называется *собственным значением*) уравнения (5.1) или ядра $K(x,t)$. Каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ (собственному значению μ).

Подчеркнем, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ из уравнения (5.1) следует, что $y(x) \equiv 0$.

Если ядро $K(x,t)$ однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (5.1) является вырожденным, то задача о нахождении собственных значений и собственных функций интегрального уравнения сводится к поиску собственных значений некоторой матрицы. В самом деле, как следует из формул (4.2), (4.3), (4.6), (4.7) (здесь $f(x) = 0$), всякое решение однородного интегрального уравнения (5.1) имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x), \tag{5.2}$$

где неизвестные числа c_k являются решением однородной системы уравнений

$$c_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.3}$$

Система (5.3) может быть записана в матричной форме

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})\mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

где $\lambda, \mu \neq 0$; $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$; $\mathbf{I} = (\delta_{ij})_n^n$ – единичная матрица порядка n; $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ – квадратная матрица порядка n; $\mathbf{C}$ – матрица-столбец, состоящая из чисел c_i $(i = \overline{1, n})$; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица-столбец.

Таким образом, собственные значения однородного интегрального уравнения (5.1) совпадают с отличными от нуля собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ и могут быть найдены из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) = 0 . \tag{5.5}$$

Отметим, что если исходное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода является неоднородным

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x)$$

и имеет вырожденное ядро $K(x,t)$, то его решение можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений (4.7), которая может быть записана в матричной форме

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{B}, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{B}$ – матрица-столбец, состоящая из чисел b_i $(i = \overline{1, n})$.

Пример 1.8. Найти характеристические числа и собственные функции для следующего однородного интегрального уравнения:

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} (t \operatorname{ch} s - s \operatorname{sh} t)\, x(s)\, ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda t C_1 - \lambda \operatorname{sh} t \cdot C_2, \tag{20}$$

где
$$C_1 = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} s \cdot x(s)\, ds; \quad C_2 = \int_{-1}^{1} s \cdot x(s)\, ds. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \displaystyle\int_{-1}^{1} s \cdot \operatorname{ch} s\, ds - \lambda C_2 \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} s \cdot \operatorname{sh} s\, ds, \\ C_2 = \lambda C_1 \displaystyle\int_{-1}^{1} s^2 ds - \lambda C_2 \int_{-1}^{1} s \operatorname{sh} s\, ds, \end{cases}$$

или после простых вычислений имеем

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = \dfrac{2}{3}\lambda C_1 - \lambda C_2 \cdot 2e, \end{cases}$$

откуда $$C_1 = 0, \quad C_2(1 + 2e \cdot \lambda) - 0.$$

Следовательно, $\lambda = -\dfrac{1}{2e}$ является единственным характеристическим числом интегрального уравнения, ему соответствует собственная функция $x(t) = C \operatorname{sh} t,\ \ C \neq 0$.

Пример 1.9. Найти характеристические числа и собственные функции для следующего однородного интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \left(45t^2 \ln s - 9s^2 \ln t\right) x(s)\, ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t) = 45\lambda t^2 C_1 - 9\lambda \ln t C_2, \tag{22}$$

где $$C_1 = \int_0^1 \ln s \cdot x(s)\, ds; \quad C_2 = \int_0^1 s^2 \cdot x(s)\, ds. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (23), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 45\lambda C_1 \displaystyle\int_0^1 s^2 \ln s ds - 9\lambda C_2 \int_0^1 \ln^2 s ds; \\ C_2 = 45\lambda C_1 \displaystyle\int_0^1 s^4 ds - 9\lambda C_2 \int_0^1 s^2 \ln s ds, \end{cases}$$

или после элементарных вычислений получим

$$\begin{cases} (1 + 5\lambda) C_1 + 18\lambda C_2 = 0; \\ 9\lambda C_1 + (\lambda - 1) C_2 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = -157\lambda^2 - 4\lambda - 1$$

и очевидно, что при любом вещественном λ он отличен от нуля. Следовательно, система (24) имеет только тривиальное решение

$C_1 = C_2 = 0,$ и поэтому заданное интегральное уравнение не имеет вещественных характеристических чисел.

Пример 1.10. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующее интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} \left(t^2 - 2ts\right) x(s)\, ds = t^3 - t.$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda t^2 C_1 - 2\lambda t C_2 + t^3 - t, \tag{25}$$

где
$$C_1 = \int_{-1}^{1} x(s)\, ds; \quad C_2 = \int_{-1}^{1} s \cdot x(s)\, ds. \tag{26}$$

Подставляя (25) в (26), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} s^2 ds - 2\lambda C_2 \int_{-1}^{1} s ds + \int_{-1}^{1} \left(s^3 - s\right) ds; \\ C_2 = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} s^3 ds - 2\lambda C_2 \int_{-1}^{1} s^2 ds + \int_{-1}^{1} \left(s^4 - s^2\right) ds, \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 = 0; \\ C_2 \left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = -\frac{4}{15}. \end{cases}$$

Отсюда получаем: а) если $\lambda = -\frac{3}{4},$ то второе уравнение этой системы несовместно, и, следовательно, заданное интегральное уравнение при этом значении λ не разрешимо; б) если $\lambda = \frac{3}{2},$ то постоянная C_1 – произвольная, а $C_2 = -\frac{4}{45}$ и решение интегрального уравнения при этом значении параметра λ имеет вид $x(t) = t^3 - \frac{11}{15} t + Ct^2;$ в) если $\lambda \neq -\frac{3}{4},$ $\lambda \neq \frac{3}{2},$ то постоянные C_1 и

C_2 равны, соответственно, $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{4}{5(3+4\lambda)}$, а решение заданного интегрального уравнения единственно и имеет вид

$$x(t) = t^3 - \frac{3(4\lambda+5)}{5(4\lambda+3)} \cdot t.$$

Пример 5.1. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cdot \cos 2t + \cos 3x \cdot \cos^3 t)\, y(t)\, dt = 0 .$$

Решение. Ядро

$$K(x,t) = \cos^2 x \cdot \cos 2t + \cos 3x \cdot \cos^3 t$$

является вырожденным. Здесь

$$p_1(x) = \cos^2 x , \quad q_1(t) = \cos 2t , \quad p_2(x) = \cos 3x , \quad q_2(t) = \cos^3 t .$$

По формулам (4.6) найдем элементы матрицы **A**:

$$a_{11} = \int_0^\pi p_1(t)\, q_1(t)\, dt = \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{12} = \int_0^\pi p_2(t)\, q_1(t)\, dt = \int_0^\pi \cos 3t \cdot \cos 2t\, dt = 0,$$

$$a_{21} = \int_0^\pi p_1(t)\, q_2(t)\, dt = \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \cos^3 t\, dt = \int_0^\pi \cos^5 t\, dt = 0 ,$$

$$a_{22} = \int_0^\pi p_2(t)\, q_2(t)\, dt = \int_0^\pi \cos 3t \cdot \cos^3 t\, dt = \frac{\pi}{8} .$$

Характеристическое уравнение (5.5) для нахождения собственных значений имеет вид

$$\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\pi}{4} - \mu & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{8} - \mu \end{vmatrix} = 0 ,$$

откуда $\left(\dfrac{\pi}{4} - \mu\right)\left(\dfrac{\pi}{8} - \mu\right) = 0$. Получаем собственные значения $\mu_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\mu_2 = \dfrac{\pi}{8}$ (соответственно характеристические числа $\lambda_1 = \dfrac{4}{\pi}$,

$\lambda_2 = \dfrac{8}{\pi}$).

1. При $\mu_1 = \dfrac{\pi}{4}$ система уравнений (5.4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\pi}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $c_2 = 0$, c_1 произвольно. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_1 = \dfrac{\pi}{4}$, находится по формуле (5.2). Именно,

$$y(x) = \lambda_1 c_1 p_1(x) + \lambda_1 c_2 p_2(x) = \lambda_1 c_1 \cos^2 x =$$

$$= \frac{4}{\pi} c_1 \cos^2 x = C_1 \cos^2 x, \quad C_1 \neq 0.$$

2. При $\mu_2 = \dfrac{\pi}{8}$ система уравнений (5.4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $c_1 = 0$, c_2 произвольно. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_2 = \dfrac{\pi}{8}$, находится по формуле (5.2). Именно,

$$y(x) = \lambda_2 c_1 p_1(x) + \lambda_2 c_2 p_2(x) = \lambda_2 c_2 \cos 3x =$$

$$= \frac{8}{\pi} c_2 \cos 3x = C_2 \cos 3x, \quad C_2 \neq 0.$$

§ 7. Альтернатива Фредгольма

Рассмотрим интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt + f(x)\,, \tag{7.1}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt \tag{7.2}$$

и союзные (сопряженные) к ним интегральные уравнения

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, z(t)\, dt + g(x)\,, \tag{7.3}$$

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, z(t)\, dt\,. \tag{7.4}$$

Согласно альтернативе Фредгольма для фиксированного характеристического числа λ или неоднородное уравнение (7.1) при заданной непрерывной функции $f(x)$ имеет единственное решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы), или соответствующее ему однородное уравнение (7.2) имеет по крайней мере одно ненулевое решение (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы).

Во 2-м случае альтернативы (т.е. когда λ – характеристическое число) для существования решения неоднородного уравнения (7.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна любому решению $z(x)$ однородного сопряженного уравнения (7.4), т.е.

$$\int_a^b f(x)\, z(x)\, dx = 0\,. \tag{7.5}$$

При выполнении последнего условия (7.5) уравнение (7.1) будет иметь бесконечное множество решений. Если же $f(x)$ не ортогональна хотя бы одному из решений $z(x)$ однородного уравнения (7.4), то неоднородное уравнение (7.1) решений не имеет.

Если ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (7.1) симметрично, то однородное сопряженное уравнение (7.4) совпадает с однородным уравнением (7.2), соответствующим уравнению (7.1).

В случае неоднородного интегрального уравнения (7.1) с вырожденным ядром (4.1)

$$y(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^n p_k(x)\,q_k(t)\right]y(t)\,dt=f(x)$$

условие (7.5) ортогональности правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t)\,p_k(t)\,dt=0\,,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n. \tag{7.6}$$

Отметим, что при использовании альтернативы Фредгольма вместо того, чтобы доказывать, что данное неоднородное интегральное уравнение (7.1) имеет единственное решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (7.2) имеет только нулевое (тривиальное) решение.

Пример 7.1. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\, y(t)\,dt=2x\,.$$

Решение. Ядро $K(x,t)=\sin\ln x\cdot 1$ является вырожденным, где $p(x)=\sin\ln x$, $q(t)=1$.

Обозначим $C=\int_0^1 y(t)\,dt$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x)=C\lambda\sin\ln x+2x\,. \tag{7.7}$$

Подставим (7.7) в выражение для C и получим

$$C=C\lambda\int_0^1\sin\ln t\,dt+\int_0^1 2t\,dt\,,$$

$$C=C\lambda\int_0^1\sin\ln t\,dt+1\,,$$

откуда

$$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1, \qquad (7.8)$$

так как

$$\int_0^1 \sin\ln t\,dt=-\frac{1}{2}.$$

1. Если $\lambda\neq-2$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x)=\frac{2\lambda}{\lambda+2}\sin\ln x+2x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\,y(t)\,dt=0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda=-2$, то исходное неоднородное интегральное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x)=2x$ не ортогональна к функции $p(x)=\sin\ln x$, поскольку

$$\int_0^1 2x\sin\ln x\,dx\neq 0.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма). Действительно, в случае однородного уравнения соотношение для определения константы *C*, соответсвующее (7.8), принимает вид

$$C\cdot 0=0,$$

т.е. *C* произвольно.

Все эти решения определяются формулой

$$y(x)=C\lambda\sin\ln x=-2C\sin\ln x=C_1\sin\ln x.$$

Пример 7.2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^\pi \cos^2 x\, y(t)\,dt = 1.$$

Решение. Ядро $K(x,t)=\cos^2 x\cdot 1$ является вырожденным, где $p(x)=\cos^2 x$, $q(t)=1$.

Обозначим $C=\int_0^\pi y(t)\,dt$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x)=C\lambda\cos^2 x+1. \qquad (7.9)$$

Подставим (7.9) в выражение для C и получим

$$C=C\lambda\int_0^\pi \cos^2 t\,dt+\int_0^\pi 1\cdot dt,$$

$$C=C\lambda\int_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt+\pi,$$

откуда

$$C\left(1-\frac{\pi\lambda}{2}\right)=\pi. \qquad (7.10)$$

1. Если $\lambda\neq\frac{2}{\pi}$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x)=\frac{2\pi\lambda}{2-\pi\lambda}\cos^2 x+1,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^\pi \cos^2 x\cdot y(t)\,dt=0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, то исходное неоднородное интегральное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x)=1$ не ортогональна к функции $p(x)=\cos^2 x$, поскольку

$$\int_0^{\pi} 1\cdot\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0 .$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма). Действительно, в случае однородного уравнения соотношение для определения константы C, соответсвующее (7.8), принимает вид

$$C\cdot 0 = 0 ,$$

т.е. C произвольно.

Все эти решения определяются формулой

$$y(x) = C\lambda\cos^2 x = \frac{2C}{\pi}\cos^2 x = C_1\cos^2 x .$$

Пример 7.3. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda\int_0^1 (2xt - 4x^2)\,y(t)\,dt = 1-2x .$$

Решение. Ядро $K(x,t) = 2xt - 4x^2$ является вырожденным, где $p_1(x) = 2x$, $q_1(t) = t$, $p_2(x) = -4x^2$, $q_2(t) = 1$.

Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$y(x) = \lambda\cdot 2x\int_0^1 ty(t)\,dt - \lambda\cdot 4x^2\int_0^1 y(t)\,dt + 1 - 2x .$$

Обозначим $C_1 = \int_0^1 ty(t)\,dt$, $C_2 = \int_0^1 y(t)\,dt$. Тогда интегральное уравнение запишется следующим образом:

$$y(x) = C_1\lambda\cdot 2x - C_2\lambda\cdot 4x^2 + 1 - 2x . \qquad (7.11)$$

Подставим (7.11) в выражения для C_1 и C_2 и получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_0^1 t(C_1 \cdot 2\lambda t - C_2\lambda \cdot 4t^2 + 1 - 2t)\,dt; \\ C_2 = \int\limits_0^1 (C_1\lambda \cdot 2t - C_2\lambda \cdot 4t^2 + 1 - 2t)\,dt, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) + C_2\lambda = -\frac{1}{6}; \\ -C_1\lambda + C_2\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = 0. \end{cases} \qquad (7.12)$$

Вычислим главный определитель Δ и вспомогательные определители Δ_{C_1} и Δ_{C_2} системы уравнений (7.12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1 + \frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) + \lambda^2 = \left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)^2,$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & \lambda \\ 0 & 1 + \frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right),$$

$$\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & -\frac{1}{6} \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\lambda\,.$$

Если $\Delta \neq 0$, то по формулам Крамера

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{6}\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right)}{\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right)^2},$$

$$C_2=\frac{\Delta_{C_2}}{\Delta}=\frac{-\frac{\lambda}{6}}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^3}.$$

1. Если $\lambda\neq-3$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x)=\frac{-2\lambda x\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2}+\frac{4x^2\cdot\frac{\lambda^2}{6}}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2}+1-2x=$$

$$=\frac{3x(2\lambda^2x-2\lambda^2-5\lambda-6)+(\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2},$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^1 (2xt-4x^2)\,y(t)\,dt=0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda=-3$, то система уравнений (7.12) принимает вид

$$\begin{cases}3C_1-3C_2=-\frac{1}{6};\\3C_1-3C_2=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}C_1-C_2=-\frac{1}{18};\\C_1-C_2=0.\end{cases}$$

Данная система уравнений несовместна, т.е. решений не имеет. Отметим, что исходное неоднородное интегральное уравнение также не имеет решений, так как правая часть $f(x)=1-2x$ не ортогональна к $p_1(x)=2x$ и $p_2(x)=-4x^2$, поскольку

$$\int_0^1 (1-2x)\,2x\,dx\neq0 \quad\text{и}\quad \int_0^1 (1-2x)\,(-4x^2)\,dx\neq0.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма), так как однородная система уравнений для определения C_1 и C_2, соответствующая (7.12), принимает вид

$$\begin{cases} 3C_1 - 3C_2 = 0; \\ 3C_1 - 3C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = C_2 = C$, где C произвольно.

Все эти решения согласно (7.11) определяются формулой

$$y(x) = -6Cx + 12Cx^2 + 1 - 2x = C_3 x - 2C_3 x^2 + 1 - 2x .$$

Пример 7.4. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, y(t)\, dt = \cos 3x .$$

Решение. Отметим, что ядро

$$K(x,t) = \cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$$

является одновременно и симметричным и вырожденным, где $p_1(x) = \cos x$, $q_1(t) = \cos t$, $p_2(x) = -\sin x$, $q_2(t) = \sin t$.

Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$y(x) = \lambda \cos x \int_0^{\pi} \cos t\, y(t)\, dt - \lambda \sin x \int_0^{\pi} \sin t\, y(t)\, dt + \cos 3x .$$

Обозначим

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos t\, y(t)\, dt , \quad C_2 = \int_0^{\pi} \sin t\, y(t)\, dt .$$

Тогда интегральное уравнение запишется следующим образом:

$$y(x) = C_1 \lambda \cos x - C_2 \lambda \sin x + \cos 3x . \tag{7.13}$$

Подставим (7.13) в выражения для C_1 и C_2 и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^{\pi} \cos t\, (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t)\, dt; \\ C_2 = \int_0^{\pi} \sin t\, (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t)\, dt, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)=0; \\ C_2\left(1+\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)=0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Вычислим определитель Δ системы уравнений (7.14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right).$$

1. Если $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) имеет единственное решение: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Поэтому исходное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение $y(x) = \cos 3x$, а соответствующее однородное уравнение

$$y(x) - \lambda\int_0^{\pi} \cos\,(x+t)\; y(t)\; dt = 0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0; \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда C_1 произвольно, $C_2 = 0$.

Исходное неоднородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_1\lambda\cos x + \cos 3x = C_1\frac{2}{\pi}\cos x + \cos 3x = C\cos x + \cos 3x\,.$$

Отметим, что правая часть $f(x) = \cos 3x$ ортогональна к $p_1(x) = \cos x$ и $p_2(x) = -\sin x$, так как

$$\int_0^{\pi} \cos 3t\,\cos t\; dt = 0\,, \quad \int_0^{\pi} \cos 3t\,\sin t\; dt = 0\,.$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_1\lambda \cos x = C_1 \frac{2}{\pi} \cos x = C_3 \cos x$$

(λ_1 является характеристическим числом, 2-й случай альтернативы Фредгольма).

3. Если $\lambda = \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 2 = 0; \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, C_2 произвольно.

Исходное неоднородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формуле:

$$y(x) = -C_2\lambda \sin x + \cos 3x = C_2 \frac{2}{\pi} \sin x + \cos 3x = C \sin x + \cos 3x .$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_2\lambda \sin x = C_2 \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sin x = C_4 \sin x$$

(λ_2 является характеристическим числом, 2-й случай альтернативы Фредгольма).